**Teoria miary i całki**
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 15

4/12/06, 11/12/06

**Zadanie 1**
Udowodnij,że twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej zachodzi również dla zbieżności według miary:
Jeśli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i istnieje funkcja mierzalna $g$ taka, że $\forall_n \ |f_n| \leq g$ oraz $\int g\,d\mu < \infty$, to $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.
(*WSK. Skorzystać z istnienia odpowiednich podciągów).*

**Zadanie 2**
Podaj przykład ciągu funkcji mierzalnych $f_n$ wspólnie ograniczonych (przez jakąś stałą $M$), zbieżnych prawie wszędzie do funkcji $f$, a mimo to takich, że $\int f_n\,d\mu \not\to \int f\,d\mu$.

**Zadanie 3**
Dla ciągu funkcji nieujemnych $f_n$, czy jakaś nierówność zachodzi w pełnej ogólności między $\overline{\lim} \int f_n\,d\mu$ a $\int \overline{\lim} f_n\,d\mu$?

**Zadanie 4***
Stosując twierdzenie Fubiniego wykaż, że

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

*WSK. Rozważ funkcję* $f(u,x) = e^{-ux}\sin x$ *na* $(0,t) \times (0,\infty)$.

**Zadanie 5**
Niech $(X, \Sigma, \mu)$ oznacza zbiór liczb naturalnych z miarą liczącą. Na $X \times X$ zadajemy funkcję:

$$f(n,m) = \begin{cases} 2 - 2^{-m} \ : \quad n = m \\ -2 + 2^{-m} \ : \quad n = m+1 \\ 0 \ : \quad \text{w pozostalych przypadkach.} \end{cases}$$

Oblicz obie całki iterowane. Dlaczego brak równości między nimi nie jest w sprzeczności w twierdzeniem Fubiniego?

**Zadanie 6**
Wykaż, że funkcja

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

nie jest całkowalna w kwadracie $[-1,1]^2$ pomimo, że całki iterowane istnieją i są sobie równe.